Mélange de deux lois Gaussiennes

Systèmes sur-déterminés dépendant de paramètres approchés

Daniel Lazard

en collaboration avec Mohab Safey el Din

Journées LNF — Toulouse, 4-6 décembre 2002

Systèmes sur-déterminés

n inconnues
$n+1$ équations
k paramètres $=$ valeurs mesurées et approchées
$+$ inégalités (conditions de signe)

Généralement :
$\exists$ une solution $\Leftrightarrow$ relation entre les paramètres (hypersurface)
Relation satisfaite $\Rightarrow$ génériquement une solution

Problèmes :

Systèmes sur-déterminés

n inconnues
$n+1$ équations
k paramètres $=$ valeurs mesurées et approchées
$+$ inégalités (conditions de signe)

Généralement :
$\exists$ une solution $\Leftrightarrow$ relation entre les paramètres (hypersurface)
Relation satisfaite $\Rightarrow$ génériquement une solution

Problèmes :
Vérifier ce qui précède

Systèmes sur-déterminés

n inconnues
$n+1$ équations
k paramètres $=$ valeurs mesurées et approchées
$+$ inégalités (conditions de signe)

Généralement :
$\exists$ une solution $\Leftrightarrow$ relation entre les paramètres (hypersurface)
Relation satisfaite $\Rightarrow$ génériquement une solution

Problèmes :
Vérifier ce qui précède
Plusieurs solutions admissibles pour certains paramètres ?

Systèmes sur-déterminés

n inconnues
$n+1$ équations
k paramètres $=$ valeurs mesurées et approchées
$+$ inégalités (conditions de signe)

Généralement :
$\exists$ une solution $\Leftrightarrow$ relation entre les paramètres (hypersurface)
Relation satisfaite $\Rightarrow$ génériquement une solution

Problèmes :
Vérifier ce qui précède
Plusieurs solutions admissibles pour certains paramètres ?
Résoudre avec des paramètres approchés

Systèmes sur-déterminés

n inconnues
$n+1$ équations
k paramètres $=$ valeurs mesurées et approchées
$+$ inégalités (conditions de signe)

Généralement :
$\exists$ une solution $\Leftrightarrow$ relation entre les paramètres (hypersurface)
Relation satisfaite $\Rightarrow$ génériquement une solution

Problèmes :
Vérifier ce qui précède
Plusieurs solutions admissibles pour certains paramètres ?
Résoudre avec des paramètres approchés
Stabilité de la solution ?

Mélange de deux Gaussiennes

5 inconnues : 2 moyennes μ_i, 2 variances σ_i^2,
la proportion du mélange p

6 paramètres : les moments centrés M_i d'ordre ≤ 6

6 équations : les moments centrés comme fonctions des inconnues

Élimination de M_1 par $x_i = \mu_i - M_1 \Rightarrow$

Mélange de deux Gaussiennes

5 inconnues : 2 moyennes μ_i, 2 variances σ_i^2,
la proportion du mélange p

6 paramètres : les moments centrés M_i d'ordre ≤ 6

6 équations : les moments centrés comme fonctions des inconnues

Élimination de M_1 par $x_i = \mu_i - M_1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
0 &= px_1 + (1-p)\,x_2 \\
M_2 &= px_1^2 + (1-p)\,x_2^2 + p\sigma_1^2 + (1-p)\,\sigma_2^2 \\
M_3 &= px_1^3 + (1-p)\,x_2^3 + 3\,(p\sigma_1^2 x_1 + (1-p)\,\sigma_2^2 x_2) \\
M_4 &= px_1^4 + (1-p)\,x_2^4 + 6\,(p\sigma_1^2 x_1^2 + (1-p)\,\sigma_2^2 x_2^2) + 3\,(p\sigma_1^4 + (1-p)\,\sigma_2^4) \\
M_5 &= px_1^5 + (1-p)\,x_2^5 + 10\,(p\sigma_1^2 x_1^3 + (1-p)\,\sigma_2^2 x_2^3) + 15\,(p\sigma_1^4 x_1 + (1-p)\,\sigma_2^4 x_2) \\
M_6 &= px_1^6 + (1-p)\,x_2^6 + 15\,(p\sigma_1^2 x_1^4 + (1-p)\,\sigma_2^2 x_2^4) + 45\,(p\sigma_1^4 x_1^2 + (1-p)\,\sigma_2^4 x_2^2) \\
&\qquad + 15\,(p\sigma_1^6 + (1-p)\,\sigma_2^6) \\
& 0 \leq p \leq 1
\end{aligned}$$

Symétrie « échange des gaussiennes »

Changement de variables :

$D = x_2 - x_1, \quad S = p\sigma_1^2 + (1-p)\sigma_2^2, \quad Z = \sigma_2^2 - \sigma_1^2, \quad P = p - 1/2$

$k_3 = M_3, \qquad k_4 = M_4 - 3M_2^2, \qquad k_5 = M_5 - 10M_2M_3,$

$k_6 = M_6 - 15M_2M_4 + 30M_2^3 - 10M_3^2$

Le système devient :

Symétrie « échange des gaussiennes »

Changement de variables :

$D = x_2 - x_1, \quad S = p\sigma_1^2 + (1-p)\sigma_2^2, \quad Z = \sigma_2^2 - \sigma_1^2, \quad P = p - 1/2$

$k_3 = M_3, \qquad k_4 = M_4 - 3M_2^2, \qquad k_5 = M_5 - 10M_2M_3,$

$k_6 = M_6 - 15M_2M_4 + 30M_2^3 - 10M_3^2$

Le système devient : $\quad -1/2 \leq P \leq 1/2$

$$
\begin{aligned}
S &= M_2 - D^2\,(P^2 - 1/4) \\
k_3 &= (1/4 - P^2)\,D\,(3Z + 2PD^2) \\
k_4 &= (1/4 - P^2)\,(3Z^2 + 12PZD^2 - D^4\,(1/2 - 6P^2)) \\
k_5 &= (1/4 - P^2)\,D\,(30PZ^2 + 5ZD^2\,(12P^2 - 1) + 4PD^4\,(6P^2 - 1)) \\
k_6 &= (1/4 - P^2)\,(30PZ^3 - 45D^2Z^2(1/2 - 6P^2) + 60PD^4Z\,(6P^2 - 1) \\
&\qquad + D^6(120P^4 - 30P^2 + 1))
\end{aligned}
$$

La symétrie devient $(D, Z, P) \rightarrow (-D, -Z, -P)$

Théorème d'injectivité

- $k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (P = \pm 1/2 \textit{ ou } D = Z = 0)$

$\Leftrightarrow$ Le mélange est une simple Gaussienne

(proportion 0 d'une Gaussienne ou deux Gaussiennes égales)

Théorème d'injectivité

- $k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (P = \pm 1/2 \textit{ ou } D = Z = 0)$

  $\Leftrightarrow$ Le mélange est une simple Gaussienne

  (proportion 0 d'une Gaussienne ou deux Gaussiennes égales)
- L'application $(P, Z, D) \to (k_3, k_4, k_5, k_6)$ est un difféomorphisme de

  $]-1/2, 1/2[\times \{(D, Z) \mid (D, Z) \neq (0, 0)\} \quad / \quad (P, Z, D) \sim (-P, -Z, -D)$

  sur son image.

Théorème d'injectivité

- $k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (P = \pm 1/2 \text{ ou } D = Z = 0)$

  $\Leftrightarrow$ Le mélange est une simple Gaussienne

  (proportion 0 d'une Gaussienne ou deux Gaussiennes égales)

- L'application $(P, Z, D) \to (k_3, k_4, k_5, k_6)$ est un difféomorphisme de

  $$]-1/2, 1/2[\times \{(D, Z) \mid (D, Z) \neq (0, 0)\} \quad / \quad (P, Z, D) \sim (-P, -Z, -D)$$

  sur son image.

Corollaire : k_3, k_4, k_5, k_6 donnés $\Rightarrow$

Au plus un mélange de distributions Gaussiennes.

Résolution

- Calculer les valeurs admissibles de $(D, Z, P))$ où la distance k_i mesuré — k_i calculé est extrêmale.

- Choisir la solution la plus proche

Résolution

- Se ramener à $k_3 = 1$ par quasi-homogénéïté
  et faire le changement de variable non-linéaire ci-après

- Calculer les valeurs admissibles de $(D, Z, P))$ où la distance
  k_i mesuré — k_i calculé est extrêmale.

- Choisir la solution la plus proche

Résolution

- Se ramener à $k_3 = 1$ par quasi-homogénéïté
  et faire le changement de variable non-linéaire ci-après

- Calculer les valeurs admissibles de $(D, Z, P))$ où la distance
  k_i mesuré — k_i calculé est extrêmale.
  Pour la norme $\sum k_i^2$ à défaut de la norme quasi-homogène $\sum k_i^{120/i}$
  Applications rationnelle $\Rightarrow$ Élimination facile des k_i

- Choisir la solution la plus proche

Résolution

- Se ramener à $k_3 = 1$ par quasi-homogénéïté
  et faire le changement de variable non-linéaire ci-après
- Calculer les valeurs admissibles de $(D, Z, P))$ où la distance
  k_i mesuré — k_i calculé est extrêmale.
  Pour la norme $\sum k_i^2$ à défaut de la norme quasi-homogène $\sum k_i^{120/i}$
  Applications rationnelle $\Rightarrow$ Élimination facile des k_i
- Choisir la solution la plus proche pour la distance dans l'espace des M_i
  Pour diminuer l'instabilité induite par les changements de variables

Démonstration de l'injectivité (1)

Injectivité locale : Pas de zéro commun au système et à sa Jacobienne en les inconnues.

$k_3 = 0$: Même techniques que le cas général en plus facile

$k_3 \neq 0$: Plusieurs étapes

Simplification du système

Changement de variable

$$X = (\tfrac{1}{4} - P^2)\, D^2, \qquad Y = 2P(\tfrac{1}{4} - P^2)\, D^3, \qquad W = \pm(\tfrac{1}{4} - P^2)\, D^3$$

$$P = \tfrac{Y}{2W}, \qquad D = \tfrac{W}{X}, \qquad W = \pm\sqrt{Y^2 + 4X^3}$$

Simplification du système

Changement de variable

$$X = (\tfrac{1}{4} - P^2)\, D^2, \qquad Y = 2P(\tfrac{1}{4} - P^2)\, D^3, \qquad W = \pm(\tfrac{1}{4} - P^2)\, D^3$$

$$P = \tfrac{Y}{2W}, \qquad D = \tfrac{W}{X}, \qquad W = \pm\sqrt{Y^2 + 4X^3}$$

Élimination de Z et $k_3 = 1$ (quasi-homogénéïté) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
-3Xk_4 &= 6X^3 + 2Y^2 - 4Y - 1 \\
-3X^2k_5 &= 4(Y+5)X^3 + 2Y^3 - 5Y \\
-3X^2k_6 &= 5k_4Y(Y-1) - 48X^5 - 3(6Y^2 - 10Y - 10)X^2 - 3XYk_5
\end{aligned}$$

Simplification du système

Changement de variable

$$X = (\tfrac{1}{4} - P^2)\, D^2, \qquad Y = 2P(\tfrac{1}{4} - P^2)\, D^3, \qquad W = \pm(\tfrac{1}{4} - P^2)\, D^3$$

$$P = \frac{Y}{2W}, \qquad D = \frac{W}{X}, \qquad W = \pm\sqrt{Y^2 + 4X^3}$$

Élimination de z et $k_3 = 1$ (quasi-homogénéïté) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
-3Xk_4 &= 6X^3 + 2Y^2 - 4Y - 1 \\
-3X^2k_5 &= 4(Y+5)X^3 + 2Y^3 - 5Y \\
-3X^2k_6 &= 5k_4Y(Y-1) - 48X^5 - 3(6Y^2 - 10Y - 10)X^2 - 3XYk_5
\end{aligned}$$

Bijection entre les paires de solutions avec $D \neq 0$

et les solutions avec $X \neq 0$

Si $k_3 \neq 0$ pas de solution avec $D = 0$ ou $X = 0$

Solutions admissibles $\Leftrightarrow X > 0$

Injectivité (2)

Base de Gröbner pour un ordre éliminant $X, Y \Rightarrow$

Polynôme en k_4, k_5, k_6, condition d'existence de solutions

Polynômes linéaires en X, Y : génériquement 1 solution sur cette hypersurface

Injectivité (2)

Base de Gröbner pour un ordre éliminant $X, Y \Rightarrow$

Polynôme en k_4, k_5, k_6, condition d'existence de solutions

Polynômes linéaires en X, Y : génériquement 1 solution sur cette hypersurface

En fait élimination de Y puis X

Injectivité (2)

Base de Gröbner pour un ordre éliminant $X, Y \Rightarrow$

Polynôme en k_4, k_5, k_6, condition d'existence de solutions

Polynômes linéaires en X, Y : génériquement 1 solution sur cette hypersurface

Coefficient des termes de tête linéaires en X ou Y :

Condition pour l'existence de plusieurs solutions

Courbe gauche définie par 25 équations

Sa projection plane : degré 70, 614 termes, coeff de 57 chiffres

Injectivité (2)

Base de Gröbner pour un ordre éliminant $X, Y \Rightarrow$

Polynôme en k_4, k_5, k_6, condition d'existence de solutions

Polynômes linéaires en X, Y : génériquement 1 solution sur cette hypersurface

Coefficient des termes de tête linéaires en X ou Y :

Condition pour l'existence de plusieurs solutions

Courbe gauche définie par 25 équations

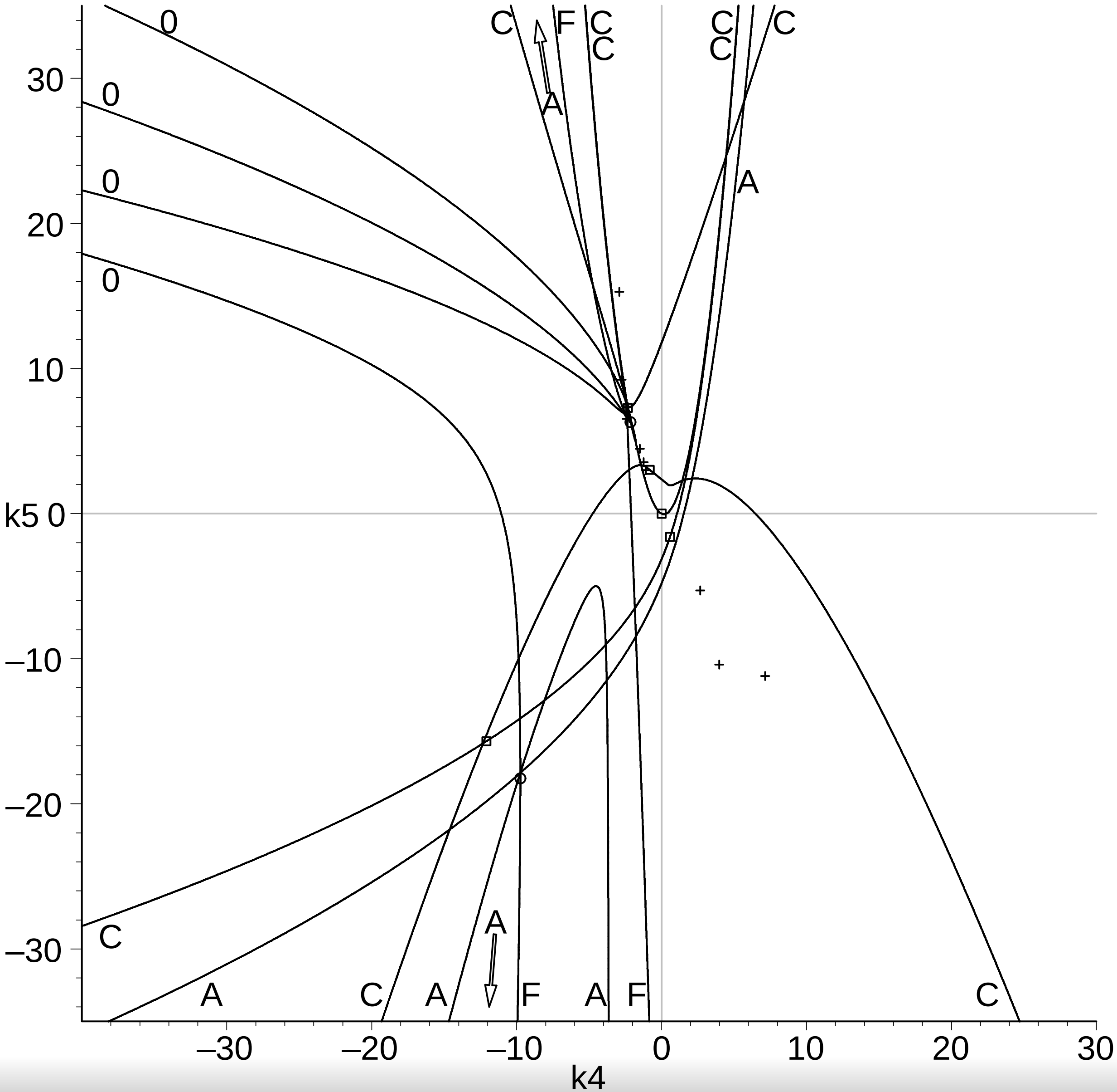
Sa projection plane : degré 70, 614 termes, coeff de 57 chiffres

Ajouter ces condititions et itérer avec les coef. de degré 2

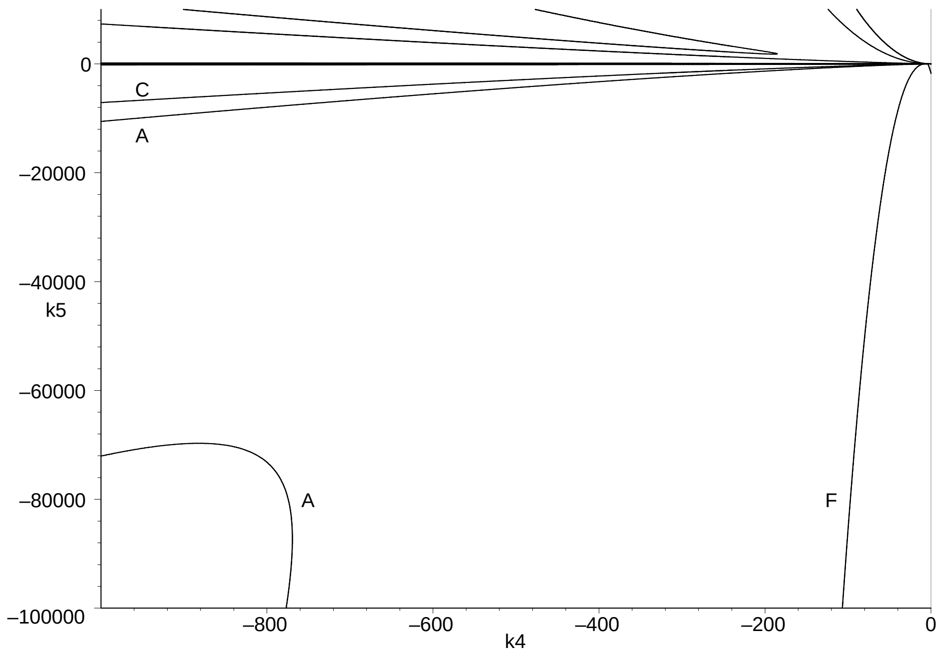
Condition pour l'existence de plus de 2 solutions

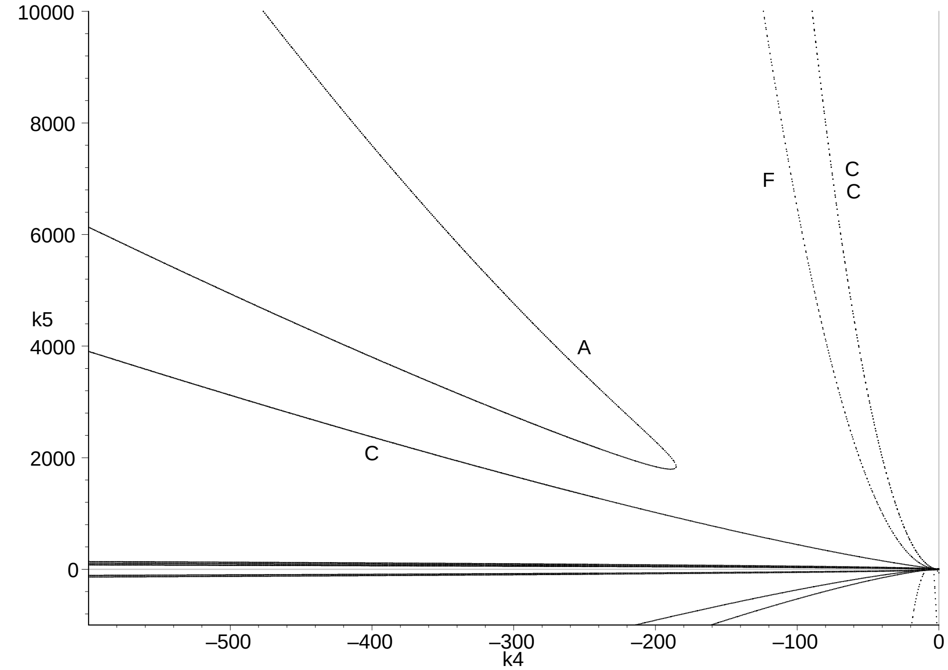
108 points dont 12 réels

la courbe

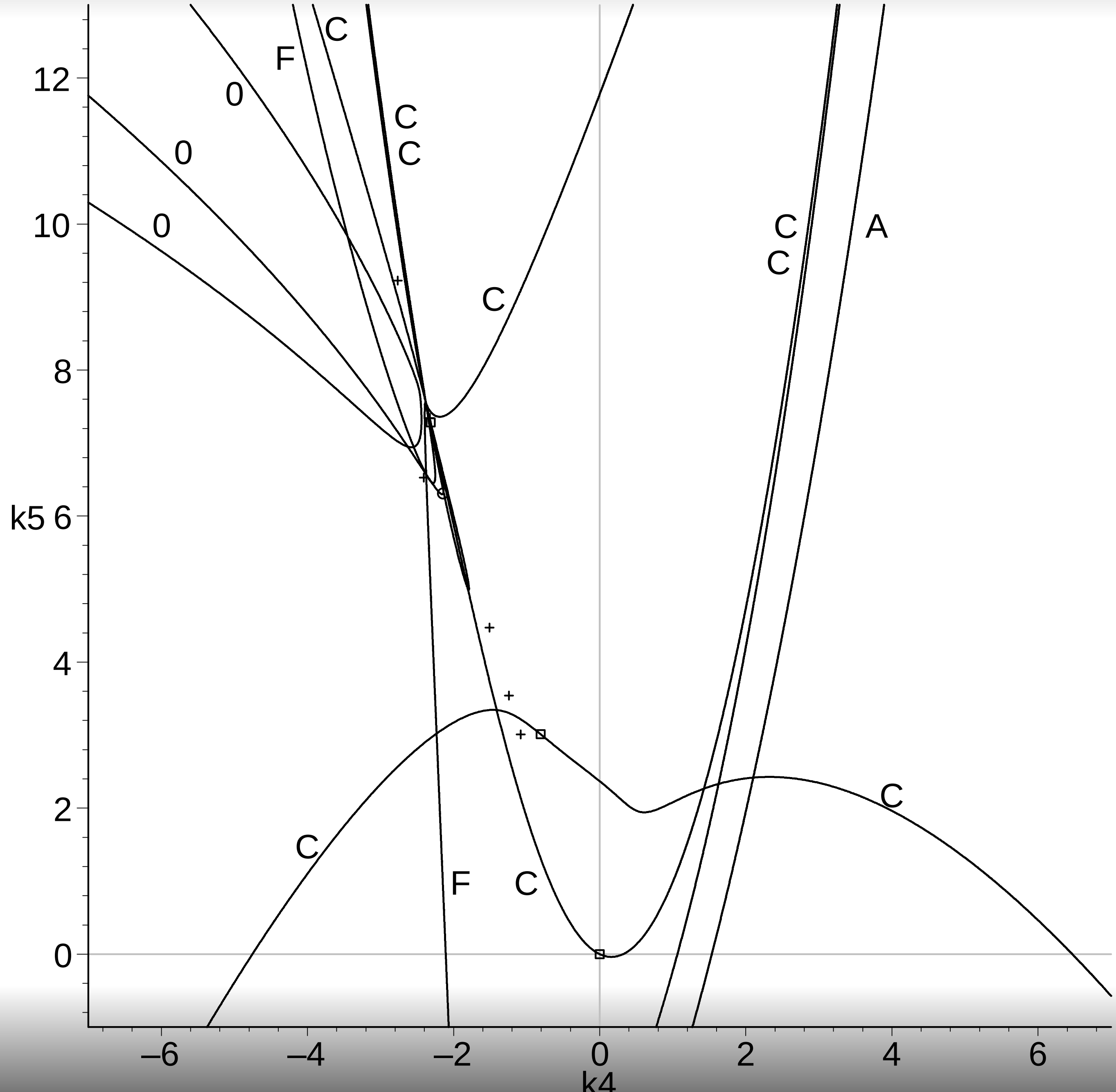


Branches lointaines

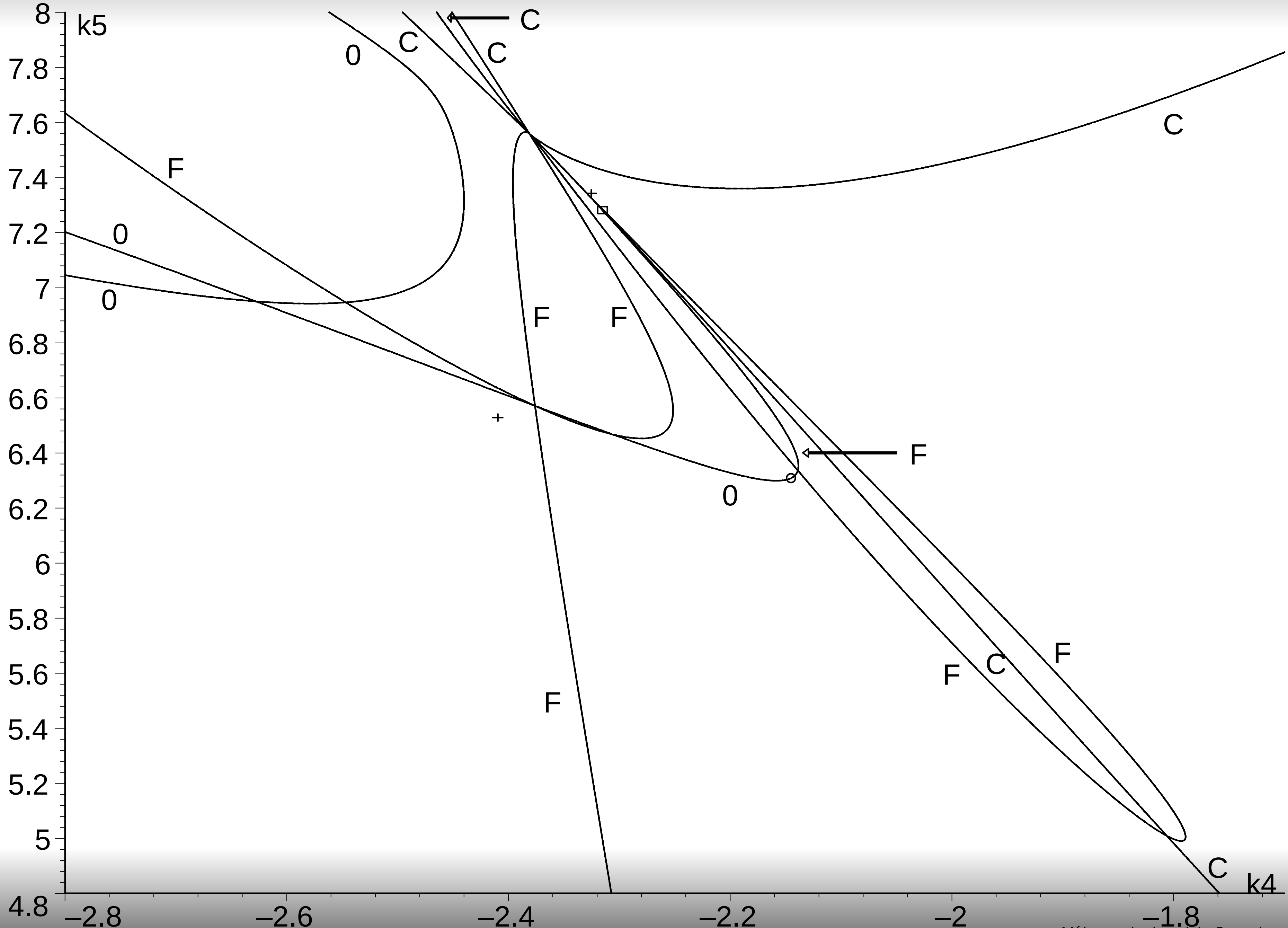




Premier zoom



Second zoom



k5
8
7.8
7.6
7.4
7.2
7
6.8
6.6
6.4
6.2
6
5.8
5.6
5.4
5.2
5
4.8
–2.8
–2.6
–2.4
–2.2
–2
–1.8
k4
C
0
C
C
C
F
0
0
F
F
F
0
F
C
F
F
C

Troisième zoom