Examen Systèmes Polynômiaux

$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ où $\mathbb{K}$ est un corps, désigne les polynômes en $x_1, \ldots, x_n$.
Dans la suite $\langle f_1, \ldots, f_r\rangle$ désigne l'idéal engendré par les f_i.
On note $\deg(m) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ le degré total du monôme $m = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.
On fixe $<$ un ordre admissible et on note:

Notation $p = \sum_{i=1}^{k} c_i m_i$ $m_1 > m_2 > \ldots$	Définition m_i monômes $c_i \in \mathbb{K}$ coefficients	Exemple lorsque $p_0 = y^3 + 5x^2 + xz$ pour l'ordre $\prec$ lexicographique avec $z \prec y \prec x$
$\deg(p) = \max\{\deg(m_i)\}$	*degré total*	$\deg(p_0) = 3$
$\mathrm{lm}(p) = m_1$	*leading monomial*	$\mathrm{lm}(p_0) = x^2$
$\mathrm{lc}(p) = c_1$	*leading coefficient*	$\mathrm{lc}(p_0) = 5$
$\mathrm{lt}(p) = c_1 m_1$	*leading term*	$\mathrm{lt}(p_0) = 5x^2$

Par extension on notera $\mathrm{lt}(S) = \{\mathrm{lt}(p) \mid p \in S\}$ si S est un ensemble de polynômes.
Si $m = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ et $m' = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$, on note $\mathrm{lcm}(m, m') = x_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdots x_n^{\max(\alpha_n,\beta_n)}$
Si $p = \sum_{i=1}^{k} c_i m_i$ est un polynôme de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, on dit qu'il est *homogène* si $\deg(m_i) = \deg(p)$ pour tout i. On note E l'ensemble des polynômes homogènes de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ et

$$E_d = \{p \in E \mid \deg(p) = d\} \cup \{0\}$$

C'est un espace vectoriel de dimension finie.
Le but de ce problème est de fournir un algorithme pour calculer rapidement la série de Hilbert-Poincaré d'un d'idéal (et donc en particulier la dimension et le degré).
Un idéal I est dit *homogène* si $I = \langle f_1, \ldots, f_r\rangle$ où les f_i sont dans E.
Si I est un idéal homogène, on note $H_I : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$

$$H_I(d) = \dim(E_d/I_d) \ \text{ avec } I_d = I \cap E_d$$

1 Série de Hilbert-Poincaré

On *admet* le théorème suivant:

Théorème 1 *Il existe $d_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $d > d_0$, $H_I(d) = P_I(d)$ où P_I est un polynôme de degré $e_I < n$. (On considère que 0 est un polynôme de degré -1.)*

La série de Hilbert-Poincaré est la série génératrice associée H_I:

$$\mathrm{HP}_I(T) = \sum_{d=0}^{\infty} H_I(d)T^d$$

Montrer que pour tout polynôme P de degré d, $P(X)-P(X-1)$ est un polynôme de degré $d-1$. Montrer par récurrence sur e_I que $(1-T)^{e_I+1} \times \mathrm{HP}_I(T)$ est un polynôme.
Dans la suite on note $\langle\!\langle I\rangle\!\rangle$ le polynôme $(1-T)^n \times \mathrm{HP}_I(T)$.
Que vaut $\langle\!\langle I\rangle\!\rangle(0)$?

2 Exemple simple

Pour l'exemple $n = 2$, $I = \langle x_1x_2, x_1^3\rangle$ ($n = 2$), calculer explicitement H_I,HP_I et $\langle\!\langle I\rangle\!\rangle$.
Dans la suite on note $\langle\!\langle f_1, \ldots, f_s\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\langle f_1, \ldots, f_s\rangle\rangle\!\rangle$.

3 Escalier

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des monômes de E, pour $m, m' \in \mathcal{M}$ on note $m|m'$ si et seulement si $\frac{m'}{m} \in \mathcal{M}$.
Une partie S de $\mathcal{M}$ est nommée *escalier* si

$$a \in S \text{ implique } \forall b \in \mathcal{M} \text{ tel que } b|a, \;\; b \in S$$

Est-ce qu'une partie X de $\mathcal{M}$ est une base de Gröbner ?
Si $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ est un idéal, et $<$ un ordre admissible, G est une base de Gröbner pour $<$ alors l'escalier associé I (noté $S(I)$) est l'ensemble des monômes $m \in \mathcal{M}$ qui ne sont pas réductibles par G. Expliquer rapidement comment trouver $S(I)$ et que, réciproquement, partir d'un escalier S on peut retrouver les termes de tte d'une base de Gröbner $G(S)$. Si $\mathrm{lm}(G(S)) = \{m_1, \ldots, m_r\}$, on écrit $S = \langle m_1, \ldots, m_r\rangle$ et on dit que $m_1, \ldots, m_r$ forment un système de cogénérateurs de S.

4 Idéal quotient

Si f est un polynôme et I un idéal on définit

$$I:(f) = \{g \in E \mid f\,g \in I\}$$

Montrer rapidement que $I:(f)$ est un idéal. Dans le cas particulier ou $I = \langle x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}\rangle$, c'est l'idéal I est engendré par un seul monôme $m = x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$, et m' est aussi un monôme $m' = x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}$ donner une formule explicite pour $\langle m\rangle : (m')$ (dans la suite on note simplement $m : m'$).

5 Coupure horizontale

Soient S un escalier de $\mathcal{M}$ et $m_0 \in S$. On pose $S' = \{m \in S \text{ tel que } m_0|m\}$, $S_1 = S\backslash S'$ et $S_2 = \left\{\frac{m}{m_0} \mid m \in S'\right\}$. Montrer que S_1 et S_2 sont des escaliers.
On nomme ce procédé, *coupure horizontale* de S par le pivot m_0.
On peut toujours supposer que S s'écrit $S = \langle b_1,\ldots,b_h, m_0b_{h+1},\ldots,m_0b_r\rangle$, avec $m_0 \nmid b_i$ pour $i = 1,\ldots,h$. Montrer alors que

$$S_1 = \langle m_0, b_1,\ldots,b_h\rangle \text{ et } S_2 = \langle b_1 : m_0,\ldots,b_h : m_0, b_{h+1},\ldots,b_r\rangle.$$

6 Série de Hilbert

On définit maintenant la série de Hilbert pour une partie quelconque S de $\mathcal{M}$ (et plus seulement pour un escalier) par les formules $\mathrm{HP}_S = \sum_{i=0}^{\infty} d_iT^i$ avec $d_i = \mathrm{Card}\,\{a \in S \mid \deg(a) = i\}$ puis $\langle\!\langle S\rangle\!\rangle = (1-T)^n \times \mathrm{HP}_S$.
Pour simplifier, on notera encore dans la suite $\langle\!\langle\langle a_1,\ldots,a_r\rangle\rangle\!\rangle = \langle\!\langle a_1,\ldots,a_r\rangle\!\rangle$.
Soit S une partie de E, si $S = S_1 \cup S_2$ avec $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ montrer $\langle\!\langle S\rangle\!\rangle = \langle\!\langle S_1\rangle\!\rangle + \langle\!\langle S_2\rangle\!\rangle$.
Pour un monôme m, on définit l'escalier translaté $\mathrm{Tr}(S,m)$ comme étant $\{m \times s \mid s \in S\}$, prouver $\langle\!\langle \mathrm{Tr}(S,m)\rangle\!\rangle = T^{\deg(m)} \times \langle\!\langle S\rangle\!\rangle$.
En déduire une formule simple pour $\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$ dans le cas d'une coupure horizontale de pivot m.

7 Coupure verticale

On suppose qu'on peut couper l'ensemble des variables en deux blocs disjoints $\{x_1, \ldots, x_n\} = X_1 \cup X_2$ (avec $X_1 \cap X_2 = \emptyset$) tels que si

$$S' = \{s \in S \mid s \text{ est un monôme composé uniquement des lettres de } X_1\}$$

alors $S'' = S \backslash S'$ est consitué de monômes composés uniquement des lettres de X_2.
Exprimer de faon simple $\langle\!\langle S \rangle\!\rangle$, en fonction de $\langle\!\langle S' \rangle\!\rangle$ et $\langle\!\langle S'' \rangle\!\rangle$.

8 Cas terminal

Montrer que :

$$\langle\!\langle x_1^{c_1}, \ldots, x_m^{c_m} \rangle\!\rangle = \prod_{i=1}^{m} (1 - T^{c_i})$$

(commencer par le cas $m = 1$).

9 Algorithme de calcul de la série

En déduire un algorithme général pour calculer $\langle\!\langle a_1, \ldots, a_r \rangle\!\rangle$ (*on utilisera dans un premier temps seulement les coupures horizontales*)

10 Algorithme F5

Cette question, plus difficile, ne sera abordée qu'après avoir traité complètement les précédentes.
Soient $f_1, \ldots, f_m$ des polynômes de E de degré total 2. On note G_j la base de Gröbner de $\{f_1, \ldots, f_j\}$. Si on fixe un degré d, l'algorithme F_5 génère la matrice suivante:

$$A_d = \begin{array}{r|l} t_1 f_1 & \cdots\cdots \\ t_2 f_1 & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots \\ t'_1 f_2 & \cdots\cdots \\ t'_2 f_2 & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

où les $t_i, t'_j, \ldots$ sont des monômes de degrés $\leqslant d-2$ satisfaisant le critère suivant:
Critère de F_5**:** $t\, f_j$ est dans la matrice A_d si $t \notin \mathrm{Id}(HT(G_{j-1}))$.
On note $U_{d,i}(n)$ le nombre de lignes de A_d faisant intervenir $\{f_1, \ldots, f_i\}$. Montrer que:
For $d \geqslant 2$:

$$U_{d,i}(n) = i \cdot \underbrace{\binom{n+d-2}{d-2}}_{\substack{\text{nombre de monômes} \\ \text{de degré} \leqslant d-2}} - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} U_{d-2,j}(n)}_{\text{critère de} F_5}$$

En admettant que les matrices A_d sont non singulières montrer que:

$$\mathrm{HP}_I(T) = \frac{(1-T^2)^m}{(1-T)^n}$$